ΘΕΜΑ Α

$\boxed{A1}$ Θεώρημα (i) σελ. 262.

$\boxed{A2}$ Ορισμός σελ 141.

$\boxed{A3}$ Θεώρημα Μέσης Τιμής σελ. 246, 247.

$\boxed{A4}$ α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ.

Τηλ.: 210-6219712 / 210-6218894 www.apolito.gr - e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

ΘΕΜΑ Β

Β1) $D_f=\mathbb{R}$ αφού $x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{(x^2)'\cdot(x^2+1)-x^2\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x=0$ με τιμή ελαχίστου $f(0)=0$

Β2) $$f''(x)=\frac{(2x)'\cdot(x^2+1)^2-2x\cdot\left[(x^2+1)^2\right]'}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{2(x^2+1)^2-4x\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2(x^2+1) - 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3} = \frac{2(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	∩	σκ	∪	σκ.	∩

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4}$$

Η f έχει 2 σημεία καμπής τα

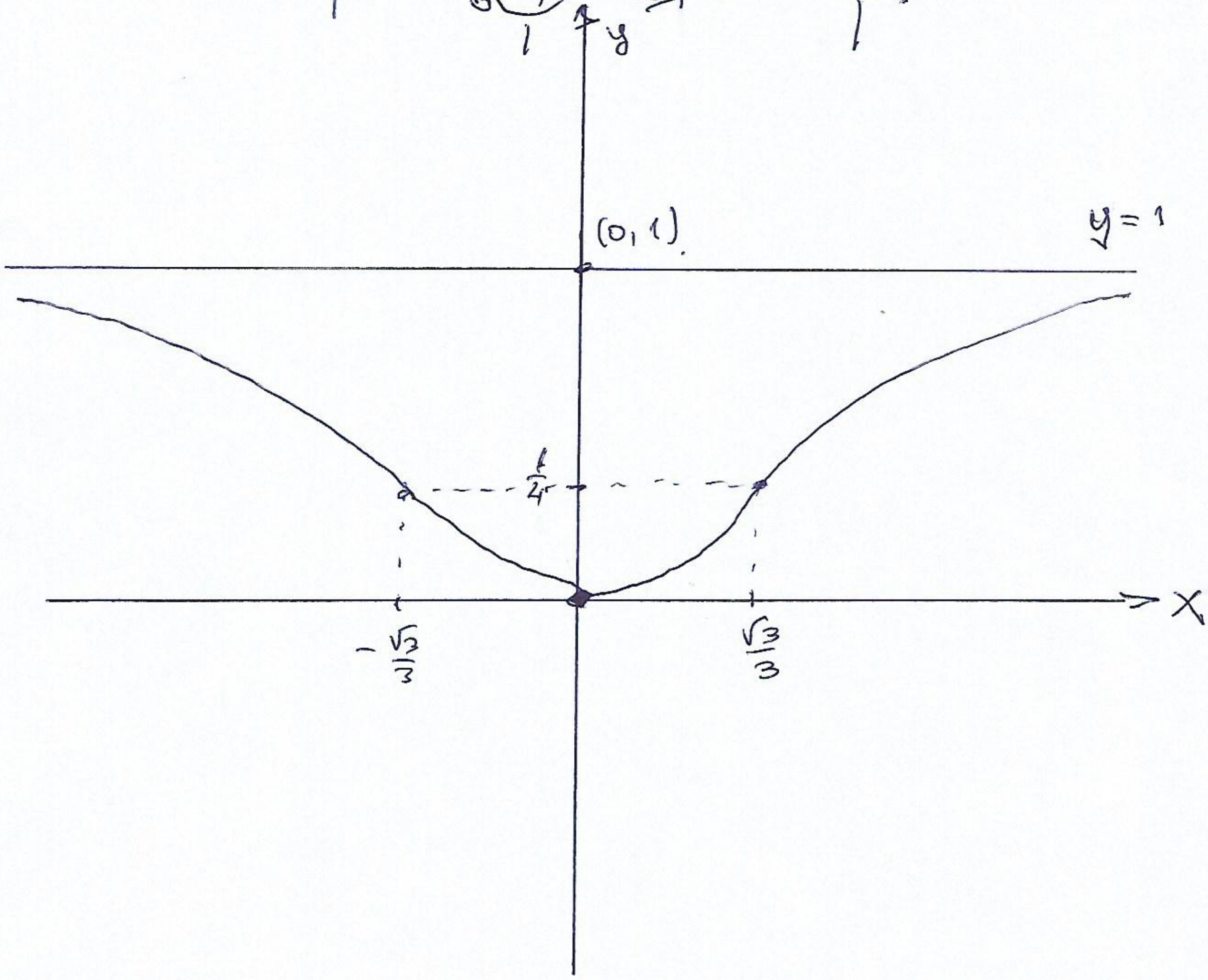
$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$

B3) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$

Άρα η ευθεία $y = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

B4)

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	



Σχόλιο: f: άρτια άρα η C_f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=0$ ($y'y$).